

A

東大京大への理系数学実戦演習【サンプル】

【発展編】

《演習時間 150 分》

現役高校生対象 大学受験指導

研伸館

第 1 問

自然数 $1, 2, \dots, n$ から k 個を取り出して積を作り，取り方すべてについてこの積を加えた和を $S(n, k)$ で表す．ただし， $k > n$ のときには $S(n, k) = 0$ とする．

例えば，

$$S(n, 1) = 1 + 2 + \dots + n$$

$$S(4, 2) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 35$$

である．

- (1) $1 < k \leq n$ に対して， $S(n, k)$ を $S(n-1, k-1)$ と $S(n-1, k)$ で表せ．
- (2) $a_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ とするとき， a_n を a_{n-1} で表せ．ただし， $n \geq 2$ とする．
- (3) (2) で定めた a_n を求めよ．

第 2 問

$\triangle ABC$ の外心 O が三角形の内部にあるとし、 α, β, γ は、

$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

を満たす正の数であるとする。直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A', B', C' とする。このとき、 $\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致すれば $\alpha = \beta = \gamma$ であることを示せ。

第 3 問

n を自然数とし, $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ とおく.

- (1) I_n と I_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ.
- (2) すべての自然数 n に対して, $I_n > 0$ であることを示せ.
- (3) すべての自然数 n に対して, 不等式

$$\frac{e}{n+2} < I_n < \frac{e}{n+1}$$

が成り立つことを示せ.

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(nI_n - e)$ を求めよ.

第 4 問

a を実数, z を 0 でない複素数とする. z と共役な複素数を \bar{z} で表す.

(1) 次を満たす z を求めよ.

$$z+1-\frac{a}{z}=0$$

(2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ.

$$\bar{z}+1-\frac{a}{z}=0$$

(3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ.

$$z(\bar{z})^2+\bar{z}-\frac{a}{z}=0$$

第 5 問

A と B の 2 人が、1 個のサイコロを次の手順により投げ合う。

① 1 回目は A が投げる

② 1, 2, 3 の目が出たら、次の回には同じ人が投げる

③ 4, 5 の目が出たら、次の回には別の人が投げる

④ 6 の目が出たら、投げた人の勝ちとし、それ以降は投げない

このとき、ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率を求めよ。

第 6 問

O を原点とする xyz 空間において、点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 2 の球の表面および内部を K_1 、点 $(-1, 0, 0)$ を中心とする半径 2 の球の表面および内部を K_2 とし、空間内の 3 点 P, Q, R に対し、

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$$

で定まる点 X, Y を考える。

- (1) P が K_1 を、 Q が K_2 をくまなく動くとき、点 X の全体が作る立体の体積を求めよ。
- (2) 次の条件を満たす点 R の全体が作る立体の体積を求めよ。
「 K_1 に属する任意の P と、 K_2 に属する任意の Q に対して、 Y は K_1 に属する」
- (3) 次の条件を満たす点 R の全体が作る立体の体積を求めよ。
「 K_1 に属する任意の P と、 K_2 に属する任意の Q に対して、 Y は和集合 $K_1 \cup K_2$ に属する」

B

東大京大への**理**系数学実戦演習【サンプル】

【標準編】

《演習時間 150分》

現役高校生対象 大学受験指導

研伸館

第 1 問

自然数 $1, 2, \dots, n$ から k 個を取り出して積を作り, 取り方すべてについてこの積を加えた和を $S(n, k)$ で表す. ただし, $k > n$ のときには $S(n, k) = 0$ とする.

例えば,

$$S(n, 1) = 1 + 2 + \dots + n$$

$$S(4, 2) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 35$$

である.

- (1) $1 < k \leq n$ に対して, $S(n, k)$ を $S(n-1, k-1)$ と $S(n-1, k)$ で表せ.
- (2) $a_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ とするとき, a_n を a_{n-1} で表せ. ただし, $n \geq 2$ とする.
- (3) (2) で定めた a_n を求めよ.

第 2 問

$\triangle ABC$ の外心 O が三角形の内部にあるとし、 α, β, γ は、

$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

を満たす正の数であるとする。直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A', B', C' とする。このとき、 $\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致すれば $\alpha = \beta = \gamma$ であることを示せ。

第 3 問

a を $0 \leq a < 1$ の範囲の数とする. $F(a) = \int_1^2 |\log(x-a)| dx$ とおくとき, $F(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ.

第 4 問

a を実数, z を 0 でない複素数とする. z と共役な複素数を \bar{z} で表す.

(1) 次を満たす z を求めよ.

$$z+1-\frac{a}{z}=0$$

(2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ.

$$\bar{z}+1-\frac{a}{z}=0$$

(3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ.

$$z(\bar{z})^2+\bar{z}-\frac{a}{z}=0$$

第 5 問

A と B の 2 人が、1 個のサイコロを次の手順により投げ合う。

① 1 回目は A が投げる

② 1, 2, 3 の目が出たら、次の回には同じ人が投げる

③ 4, 5 の目が出たら、次の回には別の人が投げる

④ 6 の目が出たら、投げた人の勝ちとし、それ以降は投げない

このとき、ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率を求めよ。

第 6 問

xyz 空間において, yz 平面上で放物線 $z=y^2$ と直線 $z=4$ で囲まれる平面図形を D とする.

点 $(1, 1, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とし, l の周りに D を 1 回転させてできる立体を E とする.

- (1) D と平面 $z=t$ との交わりを D_t とする. ただし, $0 \leq t \leq 4$ とする. 点 P が D_t 上を動くとき, 点 P と点 $(1, 1, t)$ との距離の最大値, 最小値を求めよ.
- (2) 平面 $z=t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ ($0 \leq t \leq 4$) を求めよ.
- (3) E の体積 V を求めよ.

C

東大京大への**文**系数学実戦演習【サンプル】

【東大・文科】

《演習時間 100 分》

現役高校生対象 大学受験指導

研伸館

第 1 問

$\triangle ABC$ の外心 O が三角形の内部にあるとし、 α, β, γ は、

$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

を満たす正の数であるとする。直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A', B', C' とする。このとき、 $\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致すれば $\alpha = \beta = \gamma$ であることを示せ。

第 2 問

A と B のラベルの貼られた 2 つの箱がある。箱 A には 1, 2, 3, 4, 5 の番号の書いてある球がそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 個ずつ合計 15 個入っている。箱 B には 1, 2, 3, 4, 5 の番号の書いてある球が各 3 個ずつ合計 15 個入っている。

- (1) 箱 A と箱 B から 1 つずつ球を取り出し、取り出した球の番号をそれぞれ X_A と X_B とする。 $X_A > X_B$ となる確率を求めよ。
- (2) A と B のラベルがはがれてしまい、どちらが箱 A か箱 B かがまったく分からなくなってしまった。ラベル①とラベル②を 2 つの箱のそれぞれに任意に貼り付け、箱①と箱②と新たに名前をつける。このとき、箱①と箱②から 1 つずつ球を取り出し、取り出した球の番号をそれぞれ X_1 と X_2 とする。 $X_1 > X_2$ のとき、箱①が箱 A である確率を求めよ。

第 3 問

放物線 $y = -(x-p)^2 + q$ の頂点が曲線 $y = x(x^2 - 3)$ 上にあり、これらの 2 曲線の互いに相異なる共有点の個数が 2 であるとする。このとき、これらの 2 曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。ただし、 $0 < p < 2$ とする。

第 4 問

自然数 $1, 2, \dots, n$ から k 個を取り出して積を作り, 取り方すべてについてこの積を加えた和を $S(n, k)$ で表す. ただし, $k > n$ のときには $S(n, k) = 0$ とする.

例えば,

$$S(n, 1) = 1 + 2 + \dots + n$$

$$S(4, 2) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 35$$

である.

(1) $1 < k \leq n$ に対して, $S(n, k)$ を $S(n-1, k-1)$ と $S(n-1, k)$ で表せ.

(2) $a_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ とするとき, a_n を a_{n-1} で表せ. ただし, $n \geq 2$ とする.

(3) (2) で定めた a_n を求めよ.

D

東大京大への**文**系数学実戦演習【サンプル】

【京大・文系】

《演習時間 120 分》

現役高校生対象 大学受験指導

研伸館

1

実数 x, y が $x^2 + y^2 = 2$ を満たすとき, $(x+1)(y+1)$ の最小値を求めよ.

2

$\triangle ABC$ の外心 O が三角形の内部にあるとし, α, β, γ は,

$$\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

を満たす正の数であるとする. 直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A', B', C' とする. このとき, $\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致すれば $\alpha = \beta = \gamma$ であることを示せ.

3

A と B のラベルの貼られた 2 つの箱がある. 箱 A には 1, 2, 3, 4, 5 の番号の書いてある球がそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 個ずつ合計 15 個入っている. 箱 B には 1, 2, 3, 4, 5 の番号の書いてある球が各 3 個ずつ合計 15 個入っている.

- (1) 箱 A と箱 B から 1 つずつ球を取り出し, 取り出した球の番号をそれぞれ X_A と X_B とする. $X_A > X_B$ となる確率を求めよ.
- (2) A と B のラベルがはがれてしまい, どちらが箱 A か箱 B かがまったく分からなくなってしまった. ラベル①とラベル②を 2 つの箱のそれぞれに任意に貼り付け, 箱①と箱②と新たに名前をつける. このとき, 箱①と箱②から 1 つずつ球を取り出し, 取り出した球の番号をそれぞれ X_1 と X_2 とする. $X_1 > X_2$ のとき, 箱①が箱 A である確率を求めよ.

4

放物線 $y = -(x-p)^2 + q$ の頂点が曲線 $y = x(x^2 - 3)$ 上にあり、これらの2曲線の互いに相異なる共有点の個数が2であるとする。このとき、これらの2曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。ただし、 $0 < p < 2$ とする。

5

自然数 $1, 2, \dots, n$ から k 個を取り出して積を作り、取り方すべてについてこの積を加えた和を $S(n, k)$ で表す。ただし、 $k > n$ のときには $S(n, k) = 0$ とする。

例えば、

$$S(n, 1) = 1 + 2 + \dots + n$$

$$S(4, 2) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 35$$

である。

(1) $1 < k \leq n$ に対して、 $S(n, k)$ を $S(n-1, k-1)$ と $S(n-1, k)$ で表せ。

(2) $a_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ とするとき、 a_n を a_{n-1} で表せ。ただし、 $n \geq 2$ とする。

(3) (2) で定めた a_n を求めよ。