数学

東大京大 選抜試験

記述式

■試験概要

- 制限時間 60分
- 問題数大問3問
- 試験範囲 入学ガイド(募集要項) に記載

出題例

大問1 記述問題

③ 次の各設問に答えよ.

[1] 次の問に答えよ.

(1) $a \ge 1$, $b \ge 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ、

$$\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right) \ge 2\left(ab - \frac{1}{ab}\right)$$
 (2) $a \ge 1$, $b \ge 1$, $c \ge 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\left(a^{3}-\frac{1}{a^{3}}\right)+\left(b^{3}-\frac{1}{b^{3}}\right)+\left(c^{3}-\frac{1}{c^{3}}\right) \ge 3\left(abc-\frac{1}{abc}\right)$$

[2] xyz 座標空間内の点 A(0, 0, 1), B(1, 0, 1), C(1, 1, 1), D(0, 1, 1), E(0, 0, 0),

F(1, 0, 0), G(1, 1, 0), H(0, 1, 0) を頂点とする1辺の長さが1の立方体を考える. 辺 BF 上

に1点Pをとり、線分BPの長さをa(0<a<1)とする.

3点 A, G, P を通る平面によるこの立方体の切断面の面積を a を用いて表せ、また、その面 積の最小値を求めよ.

●神大レベルの標準的入試問題(数 | A || B)です。

大問2 記述問題

2 この問題は選択問題である.

理系志望者は[理系A]問題, 文系志望者は[文系B]問題を選択し, 解答用紙の[理系A] または「文系B]に○をつけてから解答せよ、

[理系A]

f(x) は $x \ge 0$ で単調に減少する連続関数とする.

- (1) すべての x > 0 に対して, $f(x) < \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ が成り立つことを示せ.
- (2) 関数 F(x) を $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ $(x \ge 0)$ で定める.

 $\frac{F(x)}{x}$ は x > 0 で単調に減少することを示せ.

[文系 B]

座標平面において、Pはx軸上の点でx座標が正であり、Qはy軸上の点でy座標が正である. 直線 PQ は原点 O を中心とする半径 1 の円に接している. また, a, b は正の定数とする.

P. Q を動かすとき、 $aOP^2 + bOQ^2$ の最小値を a, b で表せ、

●阪大レベルの入試問題(理系:数Ⅲ 文系:数 I A II B)です。

大問3 記述問題

3 数列 {a_} } を

$$a_1 = \frac{1}{2}, \ 2a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + a_3 a_{n-3} + \dots + a_{n-1} a_1 \quad (n \ge 2)$$

で定義する.

(1) $n \ge 2 \mathcal{O} \ge 3$.

$$\begin{aligned} a_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2}) + \cdots \\ & \cdots + a_{n-2}(a_1 + a_2) + a_{n-1}a_1 \\ &= 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - 2a_1 \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ.

 $a_n = \frac{1}{2a_0}(1 - a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_{n-1}) \quad (n \ge 2)$

が成り立つことを数学的帰納法によって示せ.

- (3) a を求めよ.
- ●東大京大レベルの入試問題(数 I A II B)です。完答することが困難な場合もあると思いますが、 考えた事を何でも書いて下さい。書いた内容に応じて適宜部分点を与えます。

●□を短時間で処理し、□をしっかりと記述することがポイントです。十分な余力を残し、国に力 を注いで下さい。

