京大理系数学　２０１８　解答例

1

(30 点)

0 でない実数 a, b, c は次の条件 (i) と (ii) を満たしながら動くものとする．

(i)　$1+c^2 \leqq 2a$.

(ii)　2 つの放物線 $C_1 : y=ax^2$ と $C_2 : y=b(x-1)^2+c$ は接している．

ただし，2 つの曲線が接するとは，ある共有点において共通の接線をもつことであり，その共有点を接点という．

(1)　C_1 と C_2 の接点の座標を a と c を用いて表せ．

(2)　C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め，その範囲を図示せよ．

《解答》

(1)　$f(x)=ax^2$, $g(x)=b(x-1)^2+c$ とおく．C_1 と C_2 が接するときの接点の x 座標を $x=t$ とすると，t は

$$f(t)=g(t) \quad \text{かつ} \quad f'(t)=g'(t)$$

すなわち

$$\begin{cases} at^2=b(t-1)^2+c & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2at=2b(t-1) & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

の実数解である．

$a=b$ のとき，$b \neq 0$ より ② を満たす実数 t はない．よって，不適．

$a \neq b$ のとき，② より $t=\dfrac{b}{b-a}$ である．これが ① を満たすための条件は

$$a\cdot\left(\frac{b}{b-a}\right)^2=b\cdot\left(\frac{b}{b-a}-1\right)^2+c$$
$$ab^2=ba^2+c(b-a)^2$$
$$\{(c-a)b-ac\}(b-a)=0$$

である．$b-a \neq 0$ より

$$(c-a)b-ac=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

である．$c=a$ とすると，③ は $0\cdot b-ac=0$ となり，$a=c=0$ となるが，これは $a\neq 0$, $c\neq 0$ に反する．よって $c\neq a$ であり，③ から

$$b=\frac{ac}{c-a}$$

である．したがって

$$t=\frac{b}{b-a}=\frac{\dfrac{ac}{c-a}}{\dfrac{ac}{c-a}-a}=\frac{c}{a}$$

であるから，求める接点の座標は

$$\left(\frac{c}{a},\ \frac{c^2}{a}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

である．

(2)　接点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とおく．P の動く範囲は

$$\begin{cases} X=\dfrac{c}{a} & \cdots\cdots\cdots ④ \\ Y=\dfrac{c^2}{a} & \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ 1+c^2 \leqq 2a & \cdots\cdots\cdots ⑥ \\ c \neq a & \cdots\cdots\cdots ⑦ \\ a\neq 0,\ c\neq 0 & \cdots\cdots\cdots ⑧ \end{cases}$$

を満たす実数 a, c が存在するための条件として与えられる．

④，⑤，⑧ より，$X\neq 0$, $Y\neq 0$ であり

$$c=\frac{Y}{X},\ a=\frac{Y}{X^2} \quad \cdots\cdots\cdots ⑨$$

である．⑥，⑨ より

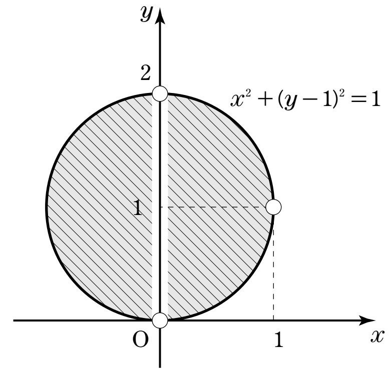
$$1+\frac{Y^2}{X^2} \leqq 2\cdot\frac{Y}{X^2}$$
$$X^2+Y^2 \leqq 2Y$$
$$X^2+(Y-1)^2 \leqq 1$$

である．⑦，⑨ より，$\dfrac{Y}{X} \neq \dfrac{Y}{X^2}$ であるから，$X\neq 1$ である．

以上から，求める範囲は

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1$$
$$\text{かつ } x\neq 0 \text{ かつ } y\neq 0 \text{ かつ } x \neq 1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

であり，図示すると，次の図のようになる．ただし，y 軸上の点と $(1, 1)$ は除き，それ以外の境界上の点は含む．



$\boxed{2}$　　(30点)

n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

《解答》

$$f(n)=n^3-7n+9$$

とおく．

$$f(0)\equiv 0^3-7\cdot 0+9\equiv 0 \pmod{3}$$
$$f(1)\equiv 1^3-7\cdot 1+9\equiv 0 \pmod{3}$$
$$f(2)\equiv 2^3-7\cdot 2+9\equiv 0 \pmod{3}$$

であるから，任意の整数 n に対して，$f(n)$ は3の倍数である．

よって，$f(n)$ が素数となるのは $f(n)=3$ のときで，そのときに限る．

$$n^3-7n+9=3$$
$$n^3-7n+6=0$$
$$(n-1)(n-2)(n+3)=0$$
$$\therefore\ n=1,\ 2,\ -3 \qquad \cdots\cdots\cdots（答）$$

である．

$\boxed{3}$ (35 点)

α は $0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える．

(i)　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する．

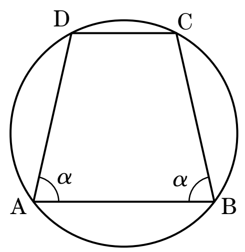
(ii)　$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{DAB}=\alpha$.

条件 (i) と (ii) を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積

$$k=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$$

が最大となるものについて，k の値を求めよ．

《解答》



外接円の半径が 1 であるから，△ABC，△ABD で正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\alpha}=2,\ \frac{\mathrm{BD}}{\sin\alpha}=2 \qquad \therefore\ \mathrm{AC}=\mathrm{BD}=2\sin\alpha$$

である．また，四角形 ABCD は円に内接するので，トレミーの定理から

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

が成り立つ．

$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}=s$，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=t$ とおくと，k のとりうる値の範囲は

$$\begin{cases} s+t=4\sin^2\alpha & \cdots\cdots\text{①} \\ st=k & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

を満たす正の実数 s，t が存在するための条件として与えられる．

解と係数の関係より，s，t は x の 2 次方程式

$$x^2-(4\sin^2\alpha)x+k=0$$

の解である．

$f(x)=x^2-(4\sin^2\alpha)x+k$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D/4=4\sin^4\alpha-k$$

であるから，$f(x)=0$ が 2 つの正の実数解をもつための条件は

$$\begin{cases} f(0)=k>0 \\ 2\sin^2\alpha>0 \\ 4\sin^4\alpha-k\geqq 0 \end{cases} \qquad \therefore\ 0<k\leqq 4\sin^4\alpha$$

である．

よって，求める k の最大値は

$4\sin^4\alpha$ ………（答）

である．

《別解》

（①，② までは同じ）

s，t がともに正の実数のとき，相加平均・相乗平均の不等式から

$$s+t\geqq 2\sqrt{st} \qquad \therefore\ st\leqq\frac{(s+t)^2}{4}$$

が成り立つ．①，② から

$$k\leqq\frac{(4\sin^2\alpha)^2}{4}=4\sin^4\alpha$$

である．等号は $s=t$ のとき，すなわち，$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}$ のときに成り立つ．

よって，求める k の最大値は

$4\sin^4\alpha$ ………（答）

である．

$\boxed{4}$ （35 点）

コインを n 回投げて複素数 z_1，z_2，$\cdots$，z_n を次のように定める．

(i)　1 回目に表が出れば $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とし，裏が出れば $z_1=1$ とする．

(ii)　$k=2$，3，$\cdots$，n のとき，k 回目に表が出れば $z_k=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}z_{k-1}$ とし，裏が出れば $z_k=\overline{z_{k-1}}$ とする．ただし，$\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である．

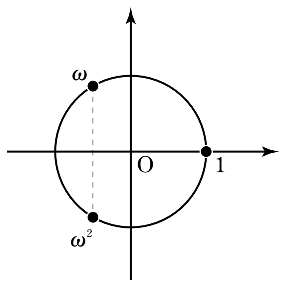
このとき，$z_n=1$ となる確率を求めよ．

《解答》

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

とおくと

$$\omega^2=\overline{\omega}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$



である．(i)，(ii) から

$z_{k-1}=1$ ならば，z_k は 1 か ω

$z_{k-1}=\omega$ ならば，z_k は ω^2

$z_{k-1}=\omega^2$ ならば，z_k は ω か 1

である．$k=1$，2，$\cdots$，n に対して $z_k=1$，ω，ω^2 である確率をそれぞれ，p_k，q_k，r_k とする．(i) から

$$p_1=\frac{1}{2},\ q_1=\frac{1}{2},\ r_1=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．(ii) から，z_{k+1} $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ について，次のようになる．

- $z_{k+1}=1$ となるのは，$z_k=1$ かつ裏が出る，または，$z_k=\omega^2$ かつ表が出る場合である．
- $z_{k+1}=\omega$ となるのは，$z_k=1$ かつ表が出る，または，$z_k=\omega^2$ かつ裏が出る場合である．
- $z_{k+1}=\omega^2$ となるのは，$z_k=\omega$ の場合で，表が出ても裏が出てもよい．
- z_{k+1} が 1，ω，ω^2 以外になることはない．

よって

$$\begin{cases} p_{k+1}=\dfrac{1}{2}p_k+\dfrac{1}{2}r_k & \cdots\cdots\cdots ② \\ q_{k+1}=\dfrac{1}{2}p_k+\dfrac{1}{2}r_k & \cdots\cdots\cdots ③ \\ r_{k+1}=q_k & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

である．

また

$$p_k+q_k+r_k=1 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．

①，②，③ から

$$p_k=q_k \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

が成り立つので，②，⑤，⑥ から

$$p_{k+1}=\frac{1}{2}(1-q_k)=\frac{1}{2}(1-p_k)$$

である．したがって

$$p_{k+1}-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(p_k-\frac{1}{3}\right),\ p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

であるから，求める確率は

$$p_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ p_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots（答）$$

である．

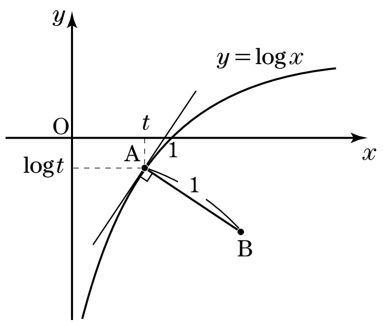
$\boxed{5}$ （35 点）

曲線 $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{A}(t\,,\,\log t)$ における法線上に，点 B を $\mathrm{AB}=1$ となるようにとる．ただし B の x 座標は t より大きいとする．

(1)　点 B の座標 $(u(t)\,,\,v(t))$ を求めよ．また $\left(\dfrac{du}{dt}\,,\,\dfrac{dv}{dt}\right)$ を求めよ．

(2)　実数 r は $0<r<1$ を満たすとし，t が r から 1 まで動くときに点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r)$，$L_2(r)$ とする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))$ を求めよ．

《解答》



(1)　$y=\log x$ より，$y'=\dfrac{1}{x}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\left(1\,,\,\frac{1}{t}\right)\qquad\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\,/\!/\left(\frac{1}{t}\,,\,-1\right)$$

である．$\mathrm{AB}=1$ で，点 B の x 座標が t より大きいことから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1\,,\,-t)$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(t+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\,\log t-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

であるから，点 B の座標は

$$\mathrm{B}\left(t+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\,\log t-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\qquad\cdots\cdots\cdots\text{（答）}$$

である．

$$\frac{du}{dt}=1-\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{t}\cdot\frac{du}{dt}$$

であるから

$$\left(\frac{du}{dt}\,,\,\frac{dv}{dt}\right)=\left(1-\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\,,\,\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\right)$$

$\cdots\cdots\cdots$（答）

である．

(2)　$(0<)\,r\leqq t\leqq 1$ のとき，$1+t^2>1$ より $(1+t^2)\sqrt{1+t^2}>1\geqq t$ であるから

$$\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}<1\qquad\therefore\ \frac{du}{dt}>0\quad\cdots\cdots\cdots①$$

である．

$$L_1(r)=\int_r^1\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt$$

であり，① より

$$L_2(r)=\int_r^1\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\cdot\frac{du}{dt}\,dt$$

であるから

$$L_1(r)-L_2(r)=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\cdot\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\,dt=\int_r^1\frac{dt}{1+t^2}$$

である．$t=\tan\theta$ と置換すると，$0<r<1$ より，$r=\tan\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる α がただ 1 つ存在し

t	$r\ \to\ 1$
θ	$\alpha\ \to\ \dfrac{\pi}{4}$

$$dt=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

であるから

$$\int_r^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}-\alpha$$

である．$r\to+0$ のとき，$\alpha\to+0$ であるから

$$\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))=\lim_{\alpha\to+0}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\pi}{4}\qquad\cdots\cdots\cdots\text{（答）}$$

である．

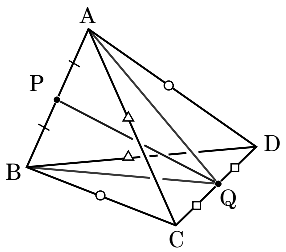
6　　(35 点)

四面体 ABCD は AC＝BD，AD＝BC を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする．

(1)　辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ．

(2)　線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ．

《解答》



(1)　△ACD≡△BDC（三辺相等）より，それぞれの三角形の中線を比べて AQ＝BQ が成り立つ．よって，△ABQ は二等辺三角形で，QP はその中線であるから，AB⊥PQ である．

■

《別解》

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{r}$ とおく．AC＝BD，AD＝BC より

$$|\vec{q}|=|\vec{r}-\vec{p}|,\ |\vec{r}|=|\vec{q}-\vec{p}|$$

である．それぞれ 2 乗すると

$$\begin{cases} |\vec{q}|^2=|\vec{r}|^2-2\vec{r}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2 & \cdots\cdots\cdots① \\ |\vec{r}|^2=|\vec{q}|^2-2\vec{q}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

であるから，①，② より

$$-\vec{r}\cdot\vec{p}-\vec{q}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots③$$

が成り立つ．③ を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\vec{p}\cdot\left(\frac{\vec{q}+\vec{r}}{2}-\frac{\vec{p}}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\vec{q}\cdot\vec{p}+\vec{r}\cdot\vec{p}-|\vec{p}|^2\right)\\&=0\end{aligned}$$

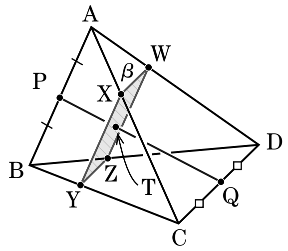
であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\neq\vec{0}$ であるから，AB⊥PQ である．

■

(2)　(1) と同様にして，CD⊥PQ である．

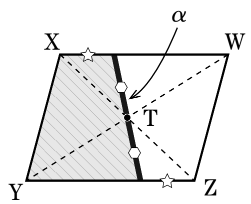
PQ＝l とする．PT＝k $(0\leqq k\leqq l)$ となる線分 PQ 上の点 T を通り，PQ に垂直な平面 β を考える．β は線分 AB および線分 CD と平行である．

$0<k<l$ のとき，β と辺 AC，BC，BD，AD との交点をそれぞれ X，Y，Z，W とする．



AB∥XY∥WZ かつ CD∥XW∥YZ であるから，四角形 XYZW は平行四辺形である．PQ は 2 平面 ABQ，CDP の交線であるから，XW と YZ の中点を結ぶ直線と XY と WZ の中点を結ぶ直線の交点が T である．よって，点 T は平行四辺形 XYZW の対角線の交点である．

ここで，平面 α と平面 β は交わる．その交線は点 T を通る直線で，平行四辺形 XYZW の面積を 2 等分する．



各 k に対する β による四面体 ABCD の断面積を $S(k)$ とすると，四面体 ABCD を α で切った 2 つの部分の体積はともに

$$\int_0^l \frac{1}{2}S(k)\,dk$$

となるから，等しい．

■