京大文系数学　２０１８　解答例

1

(30 点)

a は正の実数とし，座標平面内の点 $(x_0,\ y_0)$ は 2 つの曲線

$$C_1 : y=|x^2-1|,\quad C_2 : y=x^2-2ax+2$$

の共有点であり，$|x_0| \fallingdotseq 1$ を満たすとする．C_1 と C_2 が $(x_0,\ y_0)$ で共通の接線をもつとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

《解答》

(1)　$f(x)=x^2-1$, $g(x)=-x^2+1$, $h(x)=x^2-2ax+2$ とおく．

$$f'(x)=2x\ ,\ g'(x)=-2x\ ,\ h'(x)=2x-2a$$

である．$a>0$ であるから

$$f'(x)-h'(x)=2a \fallingdotseq 0$$

である．よって，C_1 と C_2 が $|x| \geqq 1$ で共通の接線をもつことはない．

$$g'(x)-h'(x)=-4x+2a$$

であるから，$g'(x_0)=h'(x_0)$ を解くと

$$-4x_0+2a=0 \qquad \therefore\quad x_0=\frac{a}{2}$$

である．$g(x_0)=h(x_0)$ より

$$-\left(\frac{a}{2}\right)^2+1=\left(\frac{a}{2}\right)^2-2a\cdot\frac{a}{2}+2$$

$$\frac{a^2}{2}=1 \qquad \therefore\quad a=\sqrt{2}\quad (\because\quad a>0)$$

であるから

$$h(x)=x^2-2\sqrt{2}x+2=\left(x-\sqrt{2}\right)^2$$

であり

$$x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

（これは $|x_0|<1$ を満たす）である．このとき，C_1 と C_2 のもう 1 つの共有点の x 座標を x_1 とすると

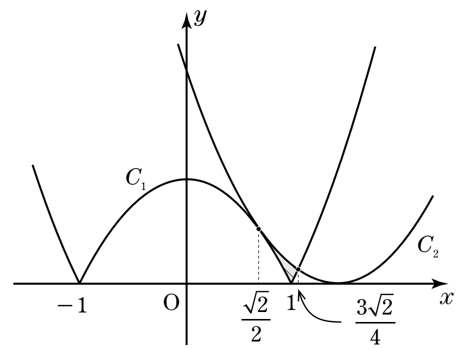
$$f(x_1)=h(x_1)\quad かつ\quad |x_1| \geqq 1$$

より

$$x_1{}^2-1=x_1{}^2-2\sqrt{2}x_1+2 \qquad \therefore\quad x_1=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

（これは $|x_1| \geqq 1$ を満たす）である．

よって，C_1 と C_2 の概形は次の図のようになる．



C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積は

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left\{(x^2-2\sqrt{2}x+2)-(-x^2+1)\right\}dx$$

$$+\int_{1}^{\frac{3\sqrt{2}}{4}}\left\{(x^2-2\sqrt{2}x+2)-(x^2-1)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}(2x^2-2\sqrt{2}x+1)dx+\int_{1}^{\frac{3\sqrt{2}}{4}}(-2\sqrt{2}x+3)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\sqrt{2}x^2+x\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}+\left[-\sqrt{2}x^2+3x\right]_{1}^{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

$$=-\frac{4}{3}+\frac{23}{24}\sqrt{2}$$

………(答)

である．

$\boxed{2}$ （30 点）

１辺の長さが１の正方形 ABCD において，辺 BC 上に B とは異なる点 P を取り，線分 AP の垂直２等分線が辺 AB，辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q，R とする．

(1)　線分 QR の長さを $\sin\angle\mathrm{BAP}$ を用いて表せ．

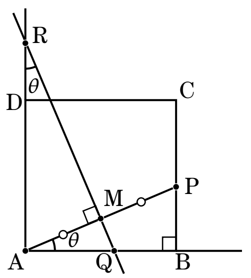
(2)　点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ．

《解答》

$\angle\mathrm{BAP}=\theta$ とおく．P は辺 BC 上で B とは異なるから

$$0<\theta\leqq\frac{\pi}{4}$$

である．線分 AP の中点を M とすると，△AQM ∽ △RQA（∠Q を共有する直角三角形より，二角相等）であるから，$\angle\mathrm{ARQ}=\theta$ である．



(1)　△APB，△AQM，△RQA でそれぞれ三角比の定義から

$$\mathrm{AP}=\frac{\mathrm{AB}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$$
$$\mathrm{AQ}=\frac{\mathrm{AM}}{\cos\theta}=\frac{\mathrm{AP}}{2\cos\theta}=\frac{1}{2\cos^2\theta}$$
$$\mathrm{QR}=\frac{\mathrm{AQ}}{\sin\theta}=\frac{1}{2\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)}$$

である．よって

$$\mathrm{QR}=\frac{1}{2\sin\angle\mathrm{BAP}\,(1-\sin^2\angle\mathrm{BAP})}$$ ………（答）

である．

(2)　$t=\sin\theta$ とおく．$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より $0<t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．

$$\mathrm{QR}=\frac{1}{2t(1-t^2)}$$

である．

$f(t)=2t(1-t^2)$ とおくと

$$f'(t)=-6t^2+2=-6\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

であるから，$f(t)$ の $0<t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ における増減は次のようになる．

t	(0)	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	(0)	↗	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって，$f(t)>0$ に注意すると，QR は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小値

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}$$ ………（答）

をとる．

$\boxed{3}$ （30 点）

n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

《解答》

$$f(n)=n^3-7n+9$$

とおく．

$$f(0)\equiv 0^3-7\cdot 0+9\equiv 0 \pmod{3}$$

$$f(1)\equiv 1^3-7\cdot 1+9\equiv 0 \pmod{3}$$

$$f(2)\equiv 2^3-7\cdot 2+9\equiv 0 \pmod{3}$$

であるから，任意の整数 n に対して，$f(n)$ は 3 の倍数である．

よって，$f(n)$ が素数となるのは $f(n)=3$ のときで，そのときに限る．

$$n^3-7n+9=3$$

$$n^3-7n+6=0$$

$$(n-1)(n-2)(n+3)=0$$

$$\therefore\ n=1,\ 2,\ -3 \qquad \cdots\cdots\cdots（答）$$

である．

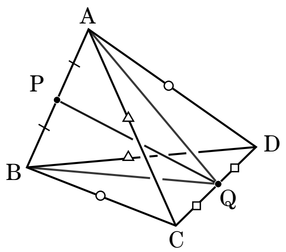
4　　(30 点)

四面体 ABCD は AC＝BD，AD＝BC を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする．

(1)　辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ．

(2)　線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ．

《解答》



(1)　△ACD ≡ △BDC（三辺相等）より，それぞれの三角形の中線を比べて AQ＝BQ が成り立つ．よって，△ABQ は二等辺三角形で，QP はその中線であるから，AB ⊥ PQ である．

■

《別解》

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{q}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{r}$ とおく．AC＝BD，AD＝BC より

$$|\vec{q}|=|\vec{r}-\vec{p}|,\ |\vec{r}|=|\vec{q}-\vec{p}|$$

である．それぞれ 2 乗すると

$$\begin{cases}|\vec{q}|^2=|\vec{r}|^2-2\vec{r}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2 & \cdots\cdots\text{①}\\ |\vec{r}|^2=|\vec{q}|^2-2\vec{q}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2 & \cdots\cdots\text{②}\end{cases}$$

であるから，①，② より

$$-\vec{r}\cdot\vec{p}-\vec{q}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=0 \quad \cdots\cdots\text{③}$$

が成り立つ．③ を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}&=\vec{p}\cdot\left(\frac{\vec{q}+\vec{r}}{2}-\frac{\vec{p}}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\vec{q}\cdot\vec{p}+\vec{r}\cdot\vec{p}-|\vec{p}|^2\right)\\&=0\end{aligned}$$

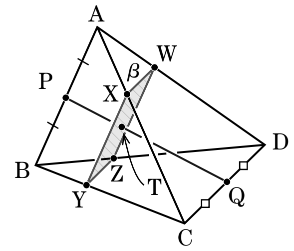
であり，$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$ であるから，AB ⊥ PQ である．

■

(2)　(1) と同様にして，CD ⊥ PQ である．

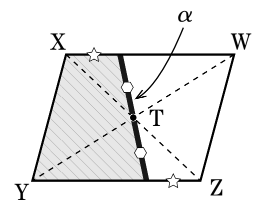
PQ＝l とする．PT＝k $(0\leqq k\leqq l)$ となる線分 PQ 上の点 T を通り，PQ に垂直な平面 β を考える．β は線分 AB および線分 CD と平行である．

$0<k<l$ のとき，β と辺 AC，BC，BD，AD との交点をそれぞれ X，Y，Z，W とする．



AB // XY // WZ かつ CD // XW // YZ であるから，四角形 XYZW は平行四辺形である．PQ は 2 平面 ABQ，CDP の交線であるから，XW と YZ の中点を結ぶ直線と XY と WZ の中点を結ぶ直線の交点が T である．よって，点 T は平行四辺形 XYZW の対角線の交点である．

ここで，平面 α と平面 β は交わる．その交線は点 T を通る直線で，平行四辺形 XYZW の面積を 2 等分する．



各 k に対する β による四面体 ABCD の断面積を $S(k)$ とすると，四面体 ABCD を α で切った 2 つの部分の体積はともに

$$\int_0^l \frac{1}{2}S(k)\,dk$$

となるから，等しい．

■

$\boxed{5}$ (30点)

整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える．ただし各球に書かれている整数は1つのみとする．

(i)　袋から無作為に球を1個取り出し，その球に書かれている整数を k とする．

(ii)　$k \neq 0$ の場合，整数 k が書かれた球を1個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

(iii)　$k = 0$ の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より1大きい整数が書かれた球を1個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す．

整数0が書かれている球が1個入っており他の球が入っていない袋を用意する．この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする．例えば X_1 は常に1である．以下 $n \geqq 2$ として次の問に答えよ．

(1)　$X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ．

(2)　$X_n \leqq n+1$ である確率を求めよ．

《解答》

(1)
$$X_n \geqq \frac{(n+2)(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$
とする．

(i)　X_n が最大になるのは，n 回とも0の球を引く場合で，その確率は
$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cdots\cdots\cdots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$
である．このとき
$$X_n = 0 + 1 + 2 + \cdots\cdots\cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
より①を満たす．

(ii)　1回目から $n-1$ 回目まですべて0の球を引き，n 回目に $n-1$ の球を引く場合の確率は
$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cdots\cdots\cdots \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$
である．このとき
$$X_n = 0 + 1 + 2 + \cdots\cdots\cdots + (n-1) + (n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$
より①を満たす．

(iii)　1回目から $n-1$ 回目まですべて0の球を引き，n 回目に $n-1$ の球以外を引く場合は
$$X_n \leqq 0 + 1 + 2 + \cdots\cdots\cdots + (n-1) + (n-2) = \frac{n(n+1)}{2} - 2$$
である．これは①を満たさないから不適．

(iv)　1回目から $n-1$ 回目までに0の球以外を引くことがある場合は
$$X_n \leqq 0 + 1 + 2 + \cdots\cdots\cdots + (n-2) + (n-2) + (n-2)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} - 3$$
である．これは①を満たさないから不適．

(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は
$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{2}{n!} \qquad \cdots\cdots\cdots (答)$$
である．

(2)
$$X_n \leqq n+1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$
とする．

(I)　X_n が最小となるのは，1回目だけ0の球を引き，2回目から n 回目まで1の球を引く場合で，その確率は
$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots\cdots\cdots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$
である．このとき
$$X_n = 0 + \underbrace{1 + 1 + \cdots\cdots\cdots + 1}_{n} = n$$
より②を満たす．

(II)　1回目は0の球を引き，2回目から n 回目までのうち1回だけ0の球を引き，残りは1の球を引く場合は，いつ0を取り出しても等確率である．$n \geqq 3$ のとき，その確率は
$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots\cdots\cdots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot (n-1) = \frac{1}{n}$$
である．$n=2$ のときもこれでよい．このとき
$$X_n = 0 + \underbrace{1 + 1 + \cdots\cdots\cdots + 1}_{n-1} + 2 = n+1$$
より②を満たす．

(III)　1回目は0の球を引き，2回目から n 回目までのうち2回以上1の球以外を引く場合は
$$X_n \geqq 0 + \underbrace{1 + 1 + \cdots\cdots\cdots + 1}_{n-2} + 2 + 2 = n+2$$
である．これは②を満たさないから不適．

(I)，(II) は互いに排反であるから，求める確率は
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \qquad \cdots\cdots\cdots (答)$$
である．