大阪大学理系数学　解答と配点

$\boxed{1}$

(1)
$$f(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$$
$$g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$$

とおき，$x>0$ で $f(x)>0$，$g(x)>0$ を示す．

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}>0$$

であるから，$f(x)$ は単調増加であり

$$f(x)>f(0)=0$$

である．また

$$g'(x)=\frac{\sqrt{1+x}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}-\frac{1}{1+x}$$
$$=\frac{2(1+x)-x-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$$
$$=\frac{2+x-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$$
$$=\frac{x^2}{2(1+x)\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{2+x+2\sqrt{1+x}}>0$$

であるから，$g(x)$ も単調増加であり

$$g(x)>g(0)=0$$

である．

以上で示せた．

(2)
$$h(x)=\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\quad(x>0)$$

とおく．

$$h'(x)=-\frac{1}{\{\log(1+x)\}^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{\{\log(1+x)\}^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\{\log(1+x)\}^2}$$

である．(1) の右側の不等式より

$$\{\log(1+x)\}^2(1+x)-x^2<0$$

であるから，$h'(x)<0$ であり，$h(x)$ は単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=0$$

である．

さらに，x が正で 0 に十分近いとき．(1) の不等式の各辺は正であるから，逆数をとって

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{2}{x(2-x)}$$
$$\iff \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<h(x)<\frac{2-(2-x)}{x(2-x)}$$
$$\iff \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}<h(x)<\frac{1}{2-x}$$

である．

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to+0}h(x)=\frac{1}{2}$$

である．

以上より，求める値域は

$$0<y<\frac{1}{2}$$

である．

$\boxed{2}$

(1)　$f(x)$ が $x-c$ で割り切れることから

$$f(c)=c^4-ac^3+bc^2-ac+1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

である．$a>0$，$b>0$ であるから，$c \leqq 0$ とすると

$$f(c) \geqq 1$$

となり矛盾する．よって，$c>0$ である．

① の両辺を $c^4\ (>0)$ で割ることにより

$$1-\frac{a}{c}+\frac{b}{c^2}-\frac{a}{c^3}+\frac{1}{c^4}=0 \iff f\left(\frac{1}{c}\right)=0$$

である．

$c \fallingdotseq 1$ のとき，$c \fallingdotseq \dfrac{1}{c}$ であるから，$f(x)$ は

$(x-c)\left(x-\dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れる．

$c=1$ のとき，① より

$$b=2a-2$$

である．

$$f'(x)=4x^3-3ax^2+2bx-a$$

であるから

$$f'(1)=4-4a+2b=0$$

である．よって，$f(x)$ は

$$(x-1)^2\left(=(x-c)\left(x-\frac{1}{c}\right)\right)$$

で割り切れる．

以上で示せた．

(2)　$f(s)=f(t)=0$

であるから，(1) より，$s>0$，$t>0$ であり

$$u=\frac{1}{s},\ \ v=\frac{1}{t}$$

として良い．

解と係数の関係より

$$a=s+t+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}$$

であり，相加・相乗平均の関係より

$$a \geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{1}{s}}+2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=4$$

である．

(3)　$s+\dfrac{1}{s}=A,\ \ t+\dfrac{1}{t}=B$

とおく．(2) の計算から

$$A \geqq 2,\ B \geqq 2$$

である．

$$a=5 \iff A+B=5$$

であるから

$$B=5-A$$

であり

$$A \geqq 2 \quad かつ \quad 5-A \geqq 2$$

$$\iff 2 \leqq A \leqq 3 \quad \cdots\cdots ②$$

である．$f(x)=0$ において解と係数の関係から

$$\begin{aligned}
b&=st+s\cdot\frac{1}{s}+s\cdot\frac{1}{t}+t\cdot\frac{1}{s}+t\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{t}\\
&=2+st+\frac{s}{t}+\frac{t}{s}+\frac{1}{st}\\
&=2+AB\\
&=2+A(5-A)\\
&=-\left(A-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{33}{4}
\end{aligned}$$

であり，② から

$$8 \leqq b \leqq \frac{33}{4}$$

である．これを満たす自然数 b は $b=8$ である．

(このとき，$(A,\ B)=(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$ でこれを満たす正の実数 s，t も存在する)．

$\boxed{3}$

(1)　$f'(t)=2\cos t-2\sin 2t$
$=2\cos t-4\sin t\cos t$
$=2(1-2\sin t)\cos t$

$g'(t)=-2\sin t+2\cos 2t$
$=2(-\sin t+1-2\sin^2 t)$
$=-2(2\sin t-1)(\sin t+1)$

であるから，$f(t)$，$g(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

となる．よって

$f(t)$ の最大値は $\dfrac{3}{2}$，$g(t)$ の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

である．

(2)　$f(t)^2+g(t)^2=4(\sin^2 t+\cos^2 t)$
$+4(\sin t\cos 2t+\cos t\sin 2t)$
$+(\cos^2 2t+\sin^2 2t)$
$=5+4\sin 3t$

である．よって

$f(t_1)^2=5+4\sin 3t_1-g(t_1)^2$
$f(t_2)^2=5+4\sin 3t_2-g(t_2)^2$

であり，これらの左辺は等しいので

$5+4\sin 3t_1-g(t_1)^2=5+4\sin 3t_2-g(t_2)^2$
$\Longleftrightarrow\ g(t_1)^2-g(t_2)^2=4(\sin 3t_1-\sin 3t_2)$

である．

ここで

$f(t)=2\sin t+1-2\sin^2 t$
$=-2\left(\sin t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$

であるから，$f(t_1)=f(t_2)$ のとき

$\dfrac{\sin t_1+\sin t_2}{2}=\dfrac{1}{2}\ \Longleftrightarrow\ \sin t_2=1-\sin t_1$

が成り立つ．

$\sin t_1=s\ \left(0\leqq s<\dfrac{1}{2}\right)$

とおくと

$\sin 3t_1-\sin 3t_2$
$=3s-4s^3-\{3(1-s)-4(1-s)^3\}$
$=3(2s-1)-4(2s-1)\{s^2+s(1-s)+(1-s)^2\}$
$=(2s-1)\{3-4(s^2-s+1)\}$
$=(1-2s)^3>0$

である．よって

$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$

である．

(3)　$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$ の y を y_1，$\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の y を y_2 とする．(1) の増減表と (2) の結果より

$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}y_1\,dx-\int_1^{\frac{3}{2}}y_2\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}y\frac{dx}{dt}dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}y\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t+\sin 2t)\cdot 2(\cos t-\sin 2t)dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2 t-\cos t\sin 2t-\sin^2 2t)dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t-2\cos^2 t\sin t-\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt$$
$$=2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\frac{t}{2}+\frac{1}{8}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$$

である．

※　ガウス・グリーンの定理を用いると

$\dfrac{1}{2}\left|f(t)g'(t)-g(t)f'(t)\right|$
$=\left|(2\sin t+\cos 2t)(-\sin t+\cos 2t)\right.$
$\left.-(2\cos t+\sin 2t)(\cos t-\sin 2t)\right|$
$=\left|-2(\sin^2 t+\cos^2 t)+(\cos^2 2t+\sin^2 2t)\right.$
$\left.+(\sin 2t\cos t+\sin t\cos 2t)\right|$
$=\left|-1+\sin 3t\right|$
$=1-\sin 3t$

であるから

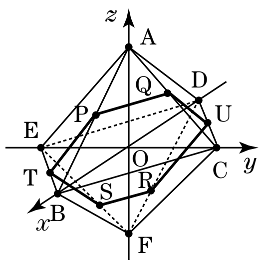
$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 3t)dt-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$$

$$=\left[t+\frac{1}{3}\cos 3t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-1$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$$

である.

$\boxed{4}$



(1)　$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}$

$\mathrm{FR}:\mathrm{RD}=\mathrm{FS}:\mathrm{SE}$

であるから

$\mathrm{PQ}/\!/\mathrm{BC}$，$\mathrm{RS}/\!/\mathrm{DE}$

である．これと

$\mathrm{BC}/\!/\mathrm{DE}$　（四角形 BCDE は正方形）

であることから，$\mathrm{PQ}/\!/\mathrm{RS}$ であり，4 点 P，Q，R，S は同一平面上にある．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}(1-s,\ 1-s,\ 2s)$

であり，同様にして

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(t-1,\ t-1,\ -2t)$

である．

よって

$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\dfrac{1}{2}(s+t-2,\ s+t-2,\ -2(s+t))$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{LM}}\right|^2=\frac{1}{4}\{2(s+t-2)^2+4(s+t)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\{3(s+t)^2-4(s+t)+4\}$$

$$=\frac{3}{2}\left(s+t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

である．$0<s+t<2$ であるから，$s+t=\dfrac{2}{3}$ のとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{LM}}\right|^2$ は最小値をとる．

このとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{LM}}\right|$ も最小であり，最小値 m は

$$m=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

である．

(3)　平面 PQRS と辺 BE，辺 CD の交点をそれぞれ T，U とする．さらに，線分 TU と線分 LM の交点を N とする．

平面 PQRS と辺 BC は平行であり，線分 TU はこの平面と xy 平面の交線であるから

$\mathrm{TU}/\!/\mathrm{BC}$

であり

$\mathrm{TU}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$

である．

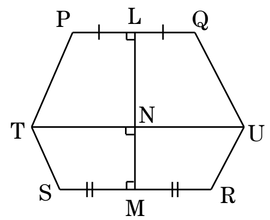
(2) より，$s+t=\dfrac{2}{3}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=-\dfrac{2}{3}(1,\ 1,\ 1)$

であり

$\overrightarrow{\mathrm{LM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

であるから，切り口は下図のようになる．



L，M の z 座標に着目して

$\mathrm{LN}:\mathrm{MN}=s:t$

であり，(2) より $\mathrm{LM}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であるから

$$\mathrm{LN}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{s}{s+t}=\sqrt{3}s$$

$$\mathrm{MN}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{t}{s+t}=\sqrt{3}t$$

である．さらに

$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}(1-s)$，$\mathrm{SR}=\sqrt{2}(1-t)$

である．

よって，切り口の面積 X を 2 つの台形の面積の和として表して

$$X=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}s\cdot\left\{\sqrt{2}(1-s)+\sqrt{2}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}t\cdot\left\{\sqrt{2}(1-t)+\sqrt{2}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left\{2(s+t)-(s^2+t^2)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left\{\frac{4}{3}-(s+t)^2+2st\right\}$$

$$=\sqrt{6}st+\frac{4\sqrt{6}}{9}$$

である．

ここで，$s>0$，$t>0$ より，相加・相乗平均の関係　より

$$\frac{s+t}{2} \geqq \sqrt{st} \iff \frac{1}{3} \geqq \sqrt{st}$$
$$\iff st \leqq \frac{1}{9}$$

である．この等号は

$$s=t=\frac{1}{3}$$

(これは $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす)

のとき成立する．したがって，X は

$$s=t=\frac{1}{3}$$

のとき

最大値 $\dfrac{\sqrt{6}}{9}+\dfrac{4\sqrt{6}}{9}=\dfrac{5\sqrt{6}}{9}$

をとる．

$\boxed{5}$

(1)　$a_1 = p$ である．

$n+1$ 試合目に A が勝つのは

・n 試合目に A が勝ち，$n+1$ 試合目に A が勝つ

・n 試合目に B が勝ち，$n+1$ 試合目に A が勝つ

のいずれかであるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= pa_n + q(1-a_n) \\ &= (p-q)a_n + q \end{aligned}$$

である．$p-q \fallingdotseq 1$ に注意して

$$a_{n+1} - \frac{q}{1-p+q} = (p-q)\left(a_n - \frac{q}{1-p+q}\right)$$

であるから，数列$\left\{a_n - \dfrac{q}{1-p+q}\right\}$は公比 $p-q$ の等比数列であり

$$\begin{aligned} & a_n - \frac{q}{1-p+q} \\ &\quad = \left(a_1 - \frac{q}{1-p+q}\right)\cdot(p-q)^{n-1} \\ \iff \quad & a_n = \frac{q+(p-p^2+pq-q)\cdot(p-q)^{n-1}}{1-p+q} \\ &\quad = \frac{q+(1-p)\cdot(p-q)^n}{1-p+q} \end{aligned}$$

である．

(2)　A が勝つことを◯，B が勝つことを×で表す．

$n \geqq 4$ のとき

◯……◯ × ◯……◯ × ◯……◯

（◯k 個）（◯l 個）（◯m 個）

$k+l+m=n-2$，$k \geqq 0$，$l \geqq 1$，$m \geqq 0$

となる確率を考える．

・$m=0$ のとき

◯の後ろの◯　…… 確率 p

◯の後ろの×　…… 確率 $1-p$

×の後ろの◯　…… 確率 q　(1 個ある)

であるから，k，l を固定するとその確率は

$p^{n-3}(1-p)^2 q$

であり，k，l の決め方が $n-2$（通り）ある．

・$m \geqq 1$ のとき

×の後ろの◯が 2 個になるので，k，l，m を固定するとその確率は

$p^{n-4}(1-p)^2 q^2$

であり，k，l，m の決め方が $(m \geqq 1$ に注意して)

$${}_{(n-2)-2+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}\ (\text{通り})$$

ある．

以上より，$n \geqq 4$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= (n-2)\cdot p^{n-3}(1-p)^2 q \\ &\quad + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot p^{n-4}(1-p)^2 q^2 \\ &= \frac{(n-2)}{2} p^{n-4}(1-p)^2 q\{2p+(n-3)q\} \end{aligned}$$

…… (*)

である．

$n=3$ のとき

×◯×

と出る場合であり，その確率は

$(1-p)^2 q$

であるから，$n=3$ のときも (*) は成り立つ．

以上より

$$b_n = \frac{(n-2)}{2} p^{n-4}(1-p)^2 q\{2p+(n-3)q\}$$

$(n \geqq 3)$

である．