大阪大学文系数学　解答と配点

1

(1) $x=\sin t-\cos t$

とおくとき

$$x^2=(\sin t-\cos t)^2$$
$$=1-2\sin t\cos t$$
$$=1-\sin 2t$$

より

$$\sin 2t=1-x^2$$

である．

ゆえに，$f(t)$ を x を用いて表すと

$$f(t)=(\sin t-\cos t)\sin 2t$$
$$=x(1-x^2)$$
$$=-x^3+x$$

である．

(2) $x=\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)$

であり，$0\leqq t\leqq \pi$ より

$$-\frac{\pi}{4}\leqq t-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$$

であるから，x のとりうる値の範囲は

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$
$$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$
$$\therefore\quad -1\leqq x\leqq\sqrt{2}$$

である．

ここで

$$g(x)=-x^3+x$$

とおくと

$$g'(x)=-3x^2+1$$

であるから，関数 $g(x)$ の $-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$ における増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↗		↘	

$$g(-1)=0,\ g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9},\ g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9},\ g(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$$

ここで

$$-\frac{2\sqrt{3}}{9}-\left(-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$
$$=\frac{9\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{9}$$
$$=\frac{9\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{9\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{9\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{150}{9\left(9\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}>0$$

より

$$-\sqrt{2}<-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

であるから，関数 $f(t)$ は

最大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　　　最小値 $-\sqrt{2}$

をとる．

大阪大学文系数学　解答と配点

$\boxed{2}$

　起こりうるすべての場合の数は全部で

$$6^3=216\text{ 通り}$$

あり，これらはすべて同様に確からしい．

(1)　与えられた定積分を計算すると

$$\begin{aligned}\int_a^c(x-a)(x-b)\,dx&=\int_a^c(x-a)\{(x-a)+(a-b)\}\,dx\\&=\int_a^c\{(x-a)^2+(a-b)(x-a)\}\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3+\frac{a-b}{2}(x-a)^2\right]_a^c\\&=\frac{1}{3}(c-a)^3+\frac{a-b}{2}(c-a)^2\\&=\frac{1}{6}(c-a)^2\{2(c-a)+3(a-b)\}\\&=\frac{1}{6}(c-a)^2(a-3b+2c)\end{aligned}$$

　であるから，求める確率は

$$\int_a^c(x-a)(x-b)\,dx=0$$

$$\frac{1}{6}(c-a)^2(a-3b+2c)=0$$

$$(c-a)^2(a-3b+2c)=0$$

　つまり

$$a=c\quad\cdots\cdots ①$$

　または

$$a+2c=3b\quad\cdots\cdots ②$$

　となる確率である．

　① となるような (a,b,c) の組は

$$6\cdot 6=36\text{ 通り}$$

　ある．

　② となるのは

<u>$b=1$ のとき</u>

$$a+2c=3$$

　より

$$(a,c)=(1,1)$$

　の 1 通り．

<u>$b=2$ のとき</u>

$$a+2c=6$$

　より

$$(a,c)=(2,2),\ (4,1)$$

　の 2 通り．

<u>$b=3$ のとき</u>

$$a+2c=9$$

より

$$(a,c)=(1,4),\ (3,3),\ (5,2)$$

の 3 通り．

<u>$b=4$ のとき</u>

$$a+2c=12$$

より

$$(a,c)=(2,5),\ (4,4),\ (6,3)$$

の 3 通り．

<u>$b=5$ のとき</u>

$$a+2c=15$$

より

$$(a,c)=(3,6),\ (5,5)$$

の 2 通り．

<u>$b=6$ のとき</u>

$$a+2c=18$$

より

$$(a,c)=(6,6)$$

の 1 通り．

　以上より

$$1+2+3+3+2+1=12\text{ 通り}$$

ある．

　さらに，① かつ ② となるのは

$$(a,b,c)=(1,1,1),\ (2,2,2),\ (3,3,3),\ (4,4,4),\ (5,5,5),\ (6,6,6)$$

の 6 通りある．

　したがって，求める確率は

$$\frac{36+12-6}{216}=\frac{7}{36}$$

である．

(2)　$a \geqq 2$，$b \geqq 2$ であり，これは底の条件を満たす．

与式を変形すると

$$2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$$

$$2\log_a b - 2\log_a c + \frac{\log_a c}{\log_a b} = 1$$

$$2(\log_a b)^2 - 2(\log_a b)(\log_a c) + \log_a c = \log_a b$$

$$2(\log_a b)(\log_a b - \log_a c) - (\log_a b - \log_a c) = 0$$

$$(\log_a b - \log_a c)(2\log_a b - 1) = 0$$

であるから

$$\log_a b = \log_a c$$

または

$$\log_a b = \frac{1}{2}$$

すなわち

$$b = c \quad \cdots\cdots ③$$

または

$$b = a^{\frac{1}{2}} \iff a = b^2 \quad \cdots\cdots ④$$

である．

$2 \leqq a \leqq 6$，$2 \leqq b \leqq 6$，$1 \leqq c \leqq 6$ であることに注意すると，③ となるような (a, b, c) の組は

$$5 \cdot 5 = 25 \text{ 通り}$$

ある．

また，④ となるような (a, b, c) の組は

$$(a, b, c) = (4, 2, c) \quad (c \text{ は任意})$$

より，6 通りある．

さらに，③ かつ ④ となるような (a, b, c) の組は

$$(a, b, c) = (4, 2, 2)$$

の 1 通りある．

したがって，求める確率は

$$\frac{25 + 6 - 1}{216} = \frac{5}{36}$$

である．

大阪大学文系数学　解答と配点

3

(1)　2点P，Qは線分AB，ACをそれぞれ$1-s:s$に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OB}\\&=s(0,\ 0,\ 1)+(1-s)(1,\ 0,\ 0)\\&=(1-s,\ 0,\ s)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}\\&=s(0,\ 0,\ 1)+(1-s)(0,\ 1,\ 0)\\&=(0,\ 1-s,\ s)\end{aligned}$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\\&=(0,\ 1-s,\ s)-(1-s,\ 0,\ s)\\&=(s-1,\ 1-s,\ 0)\\&=(s-1)(1,\ -1,\ 0)\end{aligned}$$

である．同様に

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR}&=t\overrightarrow{OF}+(1-t)\overrightarrow{OD}\\&=t(0,\ 0,\ -1)+(1-t)(-1,\ 0,\ 0)\\&=(t-1,\ 0,\ -t)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS}&=t\overrightarrow{OF}+(1-t)\overrightarrow{OE}\\&=t(0,\ 0,\ -1)+(1-t)(0,\ -1,\ 0)\\&=(0,\ t-1,\ -t)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS}&=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}\\&=(0,\ t-1,\ -t)-(t-1,\ 0,\ -t)\\&=(1-t,\ t-1,\ 0)\\&=(1-t)(1,\ -1,\ 0)\end{aligned}$$

である．

$0<t<1$より

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{s-1}{1-t}\overrightarrow{RS}$$

であるから，$\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{SR}$である．

したがって，4点P，Q，R，Sは同一平面上にあることが示された．

(2)　点Lは線分PQの中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OL}&=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}\\&=\frac{1}{2}(1-s,\ 1-s,\ 2s)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

である．同様に

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\frac{\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}}{2}\\&=\frac{1}{2}(t-1,\ t-1,\ -2t)\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LM}&=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}\\&=\frac{1}{2}(t-1,\ t-1,\ -2t)-\frac{1}{2}(1-s,\ 1-s,\ 2s)\\&=\frac{1}{2}(s+t-2,\ s+t-2,\ -2(s+t))\end{aligned}$$

である．

ここで，$s+t=u$とおくと

$$\overrightarrow{LM}=\frac{1}{2}(u-2,\ u-2,\ -2u)$$

であるから

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{LM}\right|^2&=\left|\frac{1}{2}(u-2,\ u-2,\ -2u)\right|\\&=\frac{1}{4}\{(u-2)^2+(u-2)^2+4u^2\}\\&=\frac{1}{2}(3u^2-4u+4)\\&=\frac{1}{2}\left\{3\left(u-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\right\}\end{aligned}$$

であり，$\left|\overrightarrow{LM}\right|\geqq 0$より

$$\left|\overrightarrow{LM}\right|=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{3\left(u-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\right\}}$$

である．

したがって，線分LMの長さは

$$u=\frac{2}{3}$$

のとき

$$\text{最小値 } m=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

をとる．

(3)　(2)より

$$u=\frac{2}{3}\iff s+t=\frac{2}{3}$$

のとき

$$LM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

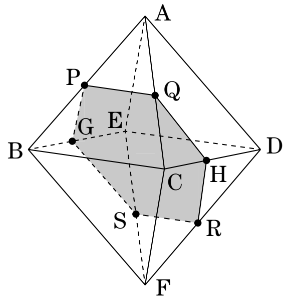
である．

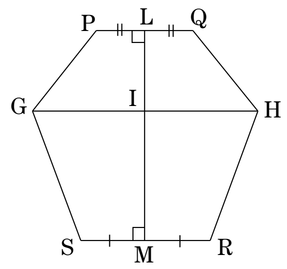
平面 PQRS と辺 BE，CD の交点をそれぞれ G，H とすると，平面 PQRS による切り口は六角形 PQHRSG となる．

また，図形の対称性より

$$\mathrm{PQ} \perp \mathrm{LM},\ \mathrm{RS} \perp \mathrm{LM}$$

である．





$$\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{BC},\ \mathrm{RS} /\!/ \mathrm{BC}$$

より，平面 PQRS と辺 BC は平行である．よって

$$\mathrm{BC} /\!/ \mathrm{GH}$$

であるから

$$\mathrm{GH} = \sqrt{2}$$

である．また，線分 LM と線分 GH の交点を I とする．(2) の①，② と，平面 BCDE が xy 平面上にあることから

$$\begin{aligned}\mathrm{LI} : \mathrm{IM} &= 2s : |-2t| \\ &= s : t \quad (\because s > 0,\ t > 0)\end{aligned}$$

である．よって

$$\mathrm{LI} = \frac{s}{s+t}\mathrm{LM} = \frac{s}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}s$$

$$\mathrm{MI} = \frac{t}{s+t}\mathrm{LM} = \frac{t}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}t$$

である．したがって

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{2}(\mathrm{PQ} + \mathrm{GH}) \cdot \mathrm{LI} + \frac{1}{2}(\mathrm{RS} + \mathrm{GH}) \cdot \mathrm{MI} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(1-s)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\} \cdot \sqrt{3}s + \frac{1}{2}\left\{(1-t)\sqrt{2} + \sqrt{2}\right\} \cdot \sqrt{3}t \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t) - (s^2 + t^2)\} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t) - (s+t)^2 + 2st\} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\left\{2 \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2st\right\} \\ &= \sqrt{6}st + \frac{4\sqrt{6}}{9}\end{aligned}$$

である．

ここで，$s > 0$，$t > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$s + t \geqq 2\sqrt{st}$$

$$\frac{2}{3} \geqq 2\sqrt{st}$$

$$\sqrt{st} \leqq \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

であり，等号は

$$s = t \quad かつ \quad s + t = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad s = t = \frac{1}{3}$$

のとき成り立つ．③ の両辺は正であるから

$$st \leqq \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{6}st + \frac{4\sqrt{6}}{9} \leqq \frac{5\sqrt{6}}{9}$$

$$\therefore \quad X \leqq \frac{5\sqrt{6}}{9}$$

である．

以上より，X は

$$s = t = \frac{1}{3}$$

のとき

$$最大値\ \frac{5\sqrt{6}}{9}$$

をとる．